Université A. Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Année : 2008/2009
Analyse 2 : SMA

Série N^0 1

Exercice 1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, montrer que

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^3}dt \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 2. A l'aide de la première formule de la moyenne, déterminer la limite suivante

$$\lim_{\theta \to 0^+} \int_{1+\theta}^{1+\theta+\theta^2} \frac{dt}{(\log t)^2}.$$

Exercice 3. Calculer les limites des suites de termes généraux :

a) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \text{Arctg}\,(\frac{k}{n}) \quad (n \in I\!N^*)$;

b) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n+3k} \quad (n \in I\!N^*)$;

c) $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1+\frac{k}{n})^{\frac{1}{n}}$ (*Considérer log* u_n).

Exercice 4. On pose, pour tout $n \in I\!N^*$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \log(1+t^2)dt.$$

1) Justifier l'existence de I_n et de J_n.

2) Montrer que les suites réelles $(I_n)_{n\in I\!N^*}$ et $(J_n)_{n\in I\!N^*}$ sont décroissantes.

3) Montrer que, pour tout $n \in I\!N^*$, $\quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n$.

4) En intégrant par parties J_n montrer que, pour tout $n \in I\!N^*$, on a

$$J_n = \frac{\log 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}.$$

En déduire $\lim_{n\longrightarrow+\infty} J_n$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} (nJ_n)$.

Exercice 5. On pose, pour tout $n \in I\!N$: $\quad J_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

a) Calculer J_0, J_1 et J_2.

b) Etablir une relation de récurrence entre J_{n+1} et J_n. En déduire J_3 et J_4.

Exercice 6. Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

ETUSUP .com

1) $\int (\operatorname{Arcsin} x)^2 dx$, 2) $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\, dx$

3) $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^5 + x^2}\, dx$, 4) $\int_{\log 3}^{\log 7} \frac{e^x dx}{(1 + e^x)\sqrt{e^x - 1}}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos^5 x dx$, 6) $\int \cos^4 x\, dx$

7) $\int \frac{dx}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4}$, 8) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{2 + \sin^2 x}$

9) $\int \frac{x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1}\, dx$, 10) $\int_1^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}\, dx$.

Exercice 7. Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_x^{4x} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

2) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de $F'(x)$.

3) Etudier la parité de F.

4) a) En utilisant la première formule de la moyenne, montrer que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} F(x) = \log 4.$$

b) Soit $\widetilde{F}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ le prolongement par continuité en 0 de F. montrer que $\widetilde{F}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..